19/05/20

Οι βέλτιστες δυϊκές μεταβλητές ως οριακά κέρδη

Θεωρούμε το ΠΓΠ σε κανονική μορφή $z = \max(\underline{c}^T \underline{x})$

$$\underline{A}\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

A είναι πλήρους βαθμού, x' μια βέλτιστη μη εκφυλισμένη βασική λύση και ο B είναι ο αντίστοιχος βασικός πίνακας.

Αντικαθιστούμε το $\underline{b}$ με το διάνυσμα $\underline{b} + \underline{d}$, $\underline{d}$ ένα μικρό διάνυσμα διαταραχής

Αποτέλεσμα: Κάθε μεταβλητή u_i της βελ. λύσης του δυϊκού μπορεί να ερμηνευθεί ως το οριακό κέρδος από την αύξηση κατά μια μονάδα της σταθεράς b_i του i-οστού περιορισμού

Η δυϊκή μέθοδος Simplex

Αλγόριθμος δυϊκής Simplex

1) Ξεκινάμε από ένα tableau που αντιστοιχεί σε μια αρχική βασική λύση x και τον αντίστοιχο βασικό πίνακα B. Όλες οι μοναδιαίες αυξήσεις κέρδους πρέπει να είναι μη αρνητικές.

2) Εξετάζουμε τις τιμές των βασικών μεταβλητών στη μηδενική στήλη του tableau. Αν είναι όλες μη αρνητικές έχουμε μια βέλτιστη βασική εφικτή λύση και ο αλγόριθμος τερματίζει. Διαφορετικά επιλέγουμε κάποιο ℓ τέτοιο ώστε $x_{B(\ell)} < 0$

3) Εξετάζουμε την ℓ στην γραμμή του tableau με στοιχεία τα $x_{B(\ell)}, u_1, \ldots, u_n$. Αν $u_i \geq 0$ για κάθε i, τότε βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού προβλήματος είναι $-\infty$ και ο αλγόριθμος τερματίζει.

4) Για κάθε i τέτοιο ώστε $u_i > 0$ υπολογίζουμε τον λόγο $|\bar{c}_i / u_i|$. Έστω j ο δείκτης της στήλης που αντιστοιχεί στον μικρότερο από αυτούς τους λόγους. Η στήλη $\underline{A}_{B(\ell)}$ φεύγει από την βάση και εισέρχεται στη θέση της η στήλη $\underline{A}_j$.

5) Προσθέτουμε σε κάθε γραμμή του tableau ένα πολλαπλάσιο της I-στης γραμμής έτσι ώστε όλα τα στοιχεία της j στης στήλης εκτός από το I στο (πιλότος) να μηδενιστούν. Τέλος διαιρούμε την I στη γραμμή (γραμμή ου πιλότου) με το a_{Ij} (πιλότος) έτσι ώστε το j στο στοιχείο της να γίνει ίσο με την μονάδα στο νέο tableau.

6) Επιστρέφουμε στο βήμα 2.

Παράδειγμα

Έχουμε το αρχικό tableau ενός ΠΓΠ

			-2	-6	-10	0	0	θ	
	C_B	X_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5		
A_4	0	2	-2	4	1	1	0		$Γ_1$
A_5	0	-1	4	$\boxed{-2}$	-3	0	1		$Γ_2$
		0	-2	-6	-10	0	0		$Γ_3$

Βρείτε τη βέλτιστη λύση χρησιμοποιώντας τη Δυϊκή Simplex

Λύση

Βλέπουμε ότι η μηδενική γραμμή είναι μη αρνητική και επίσης το $X_{B(2)} = X_5 < 0$

Συνεπώς επιλέγουμε να εξάγουμε από τη βάση τη 2η γραμμή του tableau

(Οι αντίστοιχοι λόγοι της 2ης και 3ης στήλης είναι $\left|\frac{-6}{-2}\right|$ και $\left|\frac{-10}{-3}\right|$. Επομένως ο μικρότερος λόγος είναι ο $\left|\frac{-6}{-2}\right|$ γι' αυτό εξάγουμε από τη βάση το X_2)

			-2	-6	-10	0	0		
	C_B	X_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	θ	
A_4	0	0	6	0	-5	1	2		$Γ_1' \sim Γ_1 + 2Γ_2$
A_2	-6	1/2	-2	1	3/2	0	-1/2		$Γ_2' \sim Γ_2/-2$
		3	-14	0	-1	0	-3		$Γ_3' \sim Γ_3 + 3Γ_2$

Όλες οι βασικές μεταβλητές είναι μη αρνητικές και συνεπώς έχουμε βρει τη βέλτιστη λύση

• Αν το τελευταίο στοιχείο στην στήλη του πίνακα είναι $\bar{c}_j = 0$, η μεταβλητή γραμμή δεν αλλάζει και η τιμή της αντικειμενικής του δυϊκού παραμένει ως έχει. Σε αυτή τη περίπτωση δυστυχώς μπορεί να έχουμε αέναη ανακύκλωση αλγορίθμου. Αυτό μπορεί να αποφευχθεί αν χρησιμοποιήσουμε τον επόμενο κανόνα οδήγησης.

Λεξικογραφικός Κανόνας οδήγησης για τη δυϊκή μέθοδο Simplex

1) Διαλέγουμε ως γραμμή του πίνακα οποιαδήποτε γραμμή ℓ που $x_{B(\ell)} < 0$
2) Επιλέγουμε την στήλη j που θα εισαχθεί στην βάση ως εξής: Διαιρούμε κάθε στήλη u_i για την οποία ισχύει ότι $u_{\ell i} < 0$ με $|u_{\ell i}|$ και επιλέγουμε την λεξικογραφικά μικρότερη στήλη. Σε περίπτωση ισοπαλίας διαλέγουμε τη στήλη με τον μικρότερο δείκτη.

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω κανόνα εξασφαλίζουμε ότι ο αλγόριθμος της δυϊκής Simplex θα τερματίσει, αν οι στήλες του tableau είναι λεξικογραφικά θετικές.

Αναζήτηση αρχικής βασικής εφ. λύσης του δυϊκού προβλήματος: η μέθοδος του τεχνητού περιορισμού.

Η δυϊκή Simplex όπως και η πρωτεύουσα Simplex προϋποθέτει την ύπαρξη μιας αρχικής β.ε.λ του δυϊκού προβλήματος. Αυτό στην πράξη σημαίνει ότι στο αρχικό tableau θα πρέπει όλες οι μοναδιαίες αυξήσεις κέρδους να είναι μη θετικές. Αυτό επιτυγχάνεται με την πρόσθεση ενός επιπλέον περιορισμού.

Έστω ότι οι m πρώτες μεταβλητές είναι βασικές. Εισάγουμε το νέο περιορισμό $\sum_{1}^{n} x_i \le M$ ή σε κανονική μορφή $\sum_{1}^{n} x_i = M$, $M >> 0$.
Ο νέος περιορισμός φράσσει τις μη βασικές μεταβλητές και συνεπώς έμμεσα φράσσει όλο το πρόβλημα. Για να έχουμε μια βασική εφ. λύση του δυϊκού προβλήματος στο επόμενο tableau επιλέγουμε να εισάγουμε στη βάση τη μεταβλητή x_k για την οποία ισχύει ότι $\bar{c}_k = \max(\bar{c}_i)$ ενώ φεύγει από τη βάση η μεταβλητή x_{n+1}

Στο τέλος θα καταλήξουμε σε ένα από τις παρακάτω περιπτώσεις.

1) Το δυϊκό πρόβλημα δεν είναι φραγμένο.
2) Καταλήγουμε στη βέλτιστη λύση και η περιθώρια μεταβλητή του νέου περιορισμού είναι $x_{n+1} > 0$
3) Καταλήγουμε στη βέλ. λύση και η περιθώρια μεταβλ. του νέου περιορισμού είναι $x_{n+1} = 0$

Στη πρώτη περίπτωση το πρωτεύων πρόβλημα δεν έχει εφικτές λύσεις. Στη δεύτερη η βελ. λύση στο αρχικό πρόβλημα ταυτίζεται με τη λύση του νέου προβλήματος πλην της τιμής της x_{n+1}. Στη τρίτη περίπτωση ο νέος περιορισμός είναι ενεργός στη βέλτιστη λύση.
Αν $\bar{c}_{n+1} < 0$ τότε η x_{n+1} δεν είναι βασ. μεταβλητή και ο νέος περιορισμός περιορίζει τη λύση του προβλήματος.
Όσο αυξάνει το M αυξάνει η τιμή της αντικ. συν/σης, άρα το πρόβλημα δεν είναι φραγμένο.
Αν $\bar{c}_{n+1} = 0$ η λύση του νέου προβλήματος (πλην της x_{n+1}) είναι βέλτιστη και για το αρχικό.

Παράδειγμα

Έχουμε το αρχικό tableau ενός ΠΓΠ

	c_B	x_B	A_1 (0)	A_2 (1)	A_3 (5)	A_4 (-1)	A_5	θ
A_1	0	4	1	2	-1	1	0	
A_5	0	3	0	3	4	-1	1	
			0	1	5	-1	0	

Βρείτε το αρχικό tableau της δυϊκής Simplex.

Λύση

Βλέπουμε ότι οι x_1 και x_5 είναι οι βασικές μεταβλητές οπότε εισάγουμε τον περιορισμό: $x_2 + x_3 + x_5 \le M$ ή $x_2 + x_3 + x_5 + x_6 = M$ και έχουμε το ακόλουθο tableau

	c_B	x_B	A_1 (0)	A_2 (1)	A_3 (5)	A_4 (-1)	A_5 (0)	A_6 (0)	θ
A_1	0	4	1	2	-1	1	0	0	
A_5	0	3	0	3	4	-1	1	0	
A_6	0	M	0	1	1	0	0	1	
		0	0	1	5	-1	0	0	

Εδώ έχουμε ότι $\bar{c}_3 = \max_i (\bar{c}_i)$ που σημαίνει ότι στο επόμενο tableau θα είναι βασική μεταβλητή η x_3 αντί της x_6

Άρα

	c_B	x_B	A_1 (0)	A_2 (1)	A_3 (5)	A_4 (-1)	A_5 (0)	A_6	θ
A_1	0	$M+4$	1	3	0	2	0	1	
A_5	0	$-4M+3$	0	-1	0	-5	1	-4	
A_3	5	M	0	1	1	1	0	1	
		$-5M$	0	-4	0	-6	0	-5	

Βλέπουμε ότι τα $\bar{c}_i$ είναι μη θετικά άρα μπορούμε από εδώ και πέρα να εφαρμόσουμε τη δυική Simplex.

Μια εναλλακτική τεχνική αναζήτησης αρχικής β.ε.λ του δυικού προβλήματος

Αλγόριθμος

1) Διαλέγουμε μια στήλη A_r τ.ω $\bar{c}_r > 0$ και να υπάρχει κάποιο σημείο της W_i. Επιλέγουμε οποιαδήποτε γραμμή i για την οποία έχουμε ότι $w_i > 0$ κι αφαιρούμε από τις βασ. μεταβλητές τη μεταβλητή $x_{B(i)}$ που αντιστοιχεί στην i-γραμμή του tableau δηλαδή η στήλη $A_{B(i)}$ φεύγει από τη βάση. Αν $A_r \geq 0$ τότε το πρόβλημα δεν έχει εφικτή λύση ή δεν είναι φραγμένο.

2) Η στήλη A_j που γίνεται βασική επιλέγεται με βάση το ακόλουθο κριτήριο.

$$A_j : \frac{\bar{c}_j}{v_j} = \min\left\{ \min\left\{ \frac{\bar{c}_k}{v_k} : \bar{c}_k < 0,\ v_k < 0 \right\},\ \max\left\{ \frac{\bar{c}_k}{v_k} : \bar{c}_k > 0,\ v_k > 0 \right\} \right\} \quad (1)$$

όπου v_k είναι το k-οστό στοιχείο της i-οστής γραμμής.

3) Πηγαίνουμε στο επόμενο tableau. Αν όλα τα $\bar{c}_i < 0$ ξεκινάμε τη δυική Simplex αλλιώς πηγαίνουμε στο βήμα 1.

• Το κριτήριο (1) εξασφαλίζει κατ' αρχήν ότι όλα τα μη θετικά $\bar{c}_k$ θα παραμείνουν μη θετικά κι ότι τα κάποια από τα θετικά θα μειωθούν. Το κριτήριο εγγυάται ότι

$$\frac{\bar{c}_j}{v_j} \le \frac{\bar{c}_k}{v_k} \quad \forall k : \bar{c}_k < 0,\ v_k < 0$$

και συνεπώς θα έχουμε ότι: $\bar{c}_k - v_k \frac{\bar{c}_j}{v_j} \le 0 \ \forall k: \bar{c}_k < 0, v_k > 0$

Επιπλέον $-v_k \frac{\bar{c}_j}{v_j} < 0 \ \forall k: v_k > 0$

Δηλαδή στο νέο tableau οι μη θετικές μοναδιαίες αυξήσεις κέρδους παραμένουν μη θετικές στο νέο tableau κι ακόμη προκύπτει ότι τα θετικά $\bar{c}_k$ με $v_k > 0$ θα μειωθούν.

Αν δεν έχουμε ότι: $\frac{\bar{c}_j}{v_j} = \max_k \left\{ \frac{\bar{c}_k}{v_k} : \bar{c}_k > 0, v_k > 0 \right\}$ τότε όλα τα θετικά $\bar{c}_k$ με $v_k > 0$ θα γίνουν μη θετικά στο νέο tableau αφού $\bar{c}_k - v_k \frac{\bar{c}_j}{v_j} \le 0 \ \forall k: \bar{c}_k > 0, v_k > 0$

Συνεπώς το κριτήριο εξασφαλίζει ότι τα μη θετικά $\bar{c}_k$ θα παραμένουν, ενώ κάποιες από τις θετικές μοναδ. αυξήσεις θα μειωθούν κι ενδεχομένως να γίνουν αρνητικές.
Με αυτό το τρόπο σταδιακά όλα τα $\bar{c}_k$ γίνονται μη θετικά και καταλήγουμε σε μια β.ε.λ του δυϊκού προβλήματος.

Παράδειγμα

Να λυθεί με τη δυϊκή Simplex το ΠΓΠ

$$Z = \max(5x_1 - 4x_2)$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 6$$
$$3x_1 - 2x_2 + x_4 = 24$$
$$-2x_1 + 3x_2 + x_5 = -4$$
$$x_i \geq 0 \quad i = 1, .., 5$$

Λύση

Το πρόβλημα είναι σε κανονική μορφή και οι 3 τελευταίες στήλες του πίνακα Α σχηματίζουν το μοναδιαίο πίνακα, οπότε έχουμε το αρχικό tableau:

	c_B	x_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	θ
			5	-4	0	0	0	
A_3	0	6	1	-1	1	0	0	
A_4	0	24	$\boxed{3}$	-2	0	1	0	
A_5	0	-4	-2	3	0	0	1	
		0	5	-4	0	0	0	

Βλέπουμε ότι $\bar{c}_1 = 5 > 0$ ενώ τα δύο πρώτα στοιχεία της A_1 είναι θετικά. Επιλέγω το δεύτερο κι έτσι η A_4 φεύγει από τη βάση και στη θέση η A_1 γίνεται βασική. άρα $\frac{\bar{c}_1}{v_1} = \min\{\frac{5}{3}, \frac{-4}{-2}\}$

Το επόμενο tableau είναι:

	c_B	x_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	θ
			5	-4	0	0	0	
A_3	0	-2	0	-1/3	1	-1/3	0	
A_1	5	8	1	-2/3	0	1/3	0	
A_5	0	12	0	5/3	0	2/3	1	
		40	0	-2/3	0	-5/3	0	

Όλα τα $\bar{c}_i \leq 0$ που σημαίνει ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την δυική Simplex γιατί κι υπάρχουν $x_{B(i)} < 0$

Πιο συγκεκριμένα $x_3 = x_{B(1)} = -2 < 0$ οπότε η στήλη A_3 φεύγει από τη βάση

Ακόμη $\frac{\bar{c}_2}{v_2} = \min\left\{\frac{\bar{c}_2}{v_2}, \frac{\bar{c}_4}{v_4}\right\} = \min\{2, 5\}$ άρα η στήλη A_2 γίνεται βάση

Κι έχουμε

	c_B	x_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	θ
			5	-4	0	0	0	
A_2	-4	6	0	1	-3	1	0	
A_1	5	12	1	0	-2	0	0	
A_5	0	2	0	0	5	0	1	
		-36	0	0	-2	0	0	

Όλα τα $x_{B(i)} \geq 0$ οπότε η αντίστοιχη λύση $x^T = [12, 6, 0, 0, 2]$ και η βέλτιστη λύση $z = 36$